30/10/2018

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

$A_{n\times n} = (\alpha_{ij})$

$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} \alpha_{ki} \det A_{ki}$

Ισχύουν οι ιδιότητες:

1) $\det(M_i^{(\alpha)} A) = \alpha \det A$, 3) $\det(A_{ij}^{(\alpha)} A) = \det A$ $\Big\}$ Στοιχ. Μεταοχ.

2) $\det(E_{ij} A) = -\det A$

$\det(M_i(\alpha)) = \alpha$ (άνω τριγ.)
$\det(E_{ij}) = -1 \det I_{n\times n} = -1$
$\det(A_{ij}(\alpha)) = \det I_{n\times n} = 1$

Θεώρημα
$\det(E_k E_{k-1} \dots E_1 A) =$
$\det(E_k)\det(E_{k-1}) \dots \det(E_1)\det A$
Όταν οι $E_1 \dots E_k$ είναι στοιχ. πίνακες.

Πόρισμα (+) Αν R είναι ο ανηγμ. κλιμακωτός του πίνακα A και $A = E_k \dots E_1 R$ τότε: $\det A = \det E_k \dots \det E_1 \cdot \det R$. Οπότε αν ο R είναι ο ταυτοτικός τότε $\det A = \det E_k \dots \det E_1 \neq 0$
ενώ αν ο $R \neq I$ θα έχει μια γραμμή μηδέν, άρα $\det R = 0$ και $\det A = 0$ (++)

Πόρισμα Ο A αντιστρέφεται αν $\det A \neq 0$.
Θεώρημα $\det(AB) = \det A \det B$

Απόδ: $A = E_k \dots E_1 R$
$AB = E_k \dots E_1 \underbrace{(R \cdot B)}_{B'} = E_k \dots E_1 \cdot B'$

$\det(E_k \dots E_1 \cdot B') = \det E_k \dots \det E_1 \cdot \det B'$
$\det(AB) = \det E_k \dots \det E_1 \cdot \det B'$
Αν $R = I \Rightarrow B' = B$ και
$\det(AB) = \underbrace{\det E_k \dots \det E_1}_{\det A \text{ (+)}} \det B$

Αν $R \neq I$ θα έχει μια γραμμή 0. Άρα $\det A = 0$ (++) και
RB θα έχει μια γραμμή 0 άρα $\det RB = 0$
Τελικά $\det AB = 0 = \det A \cdot \det B$

π.χ. $\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ 3 & -6 & 9\\ 2 & 6 & 1\end{pmatrix}$ → 1) Sarrus $\begin{pmatrix}0 & 1 & 5 & 0 & 1\\ 3 & -6 & 9 & 3 & -6\\ 2 & 6 & 1 & 2 & 6\end{pmatrix}$

→ 2) Τύπο.

→ 3) Γραμμοπράξεις

3 Τρόποι εύρεσης ορίζουσας

$$\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ 3 & -6 & 9\\ 2 & 6 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ 1 & -12 & 8\\ 2 & 6 & 1\end{pmatrix} \quad \det\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ 1 & -12 & 8\\ 0 & 28 & -15\end{pmatrix} = (-1)\det\begin{pmatrix}1 & 5\\ 28 & -15\end{pmatrix} =$$

$$= -\det\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & -15-(8)5\end{pmatrix} = 285+15$$

π.χ. $\det\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & y & y^2\\ 1 & z & z^2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & y-x & y^2-x^2\\ 0 & z-x & z^2-x^2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}y-x & y^2-x^2\\ z-x & z^2-x^2\end{pmatrix} =$

$$= (y-x)\det\begin{pmatrix}1 & y+x\\ z-x & z^2-x^2\end{pmatrix} = (y-x)(z-x)\det\begin{pmatrix}1 & y+x\\ 1 & z+x\end{pmatrix} = (y-x)(z-x)\det\begin{pmatrix}1 & y+x\\ 0 & z-y\end{pmatrix}$$

$= (y-x)(z-x)(z-y) \neq 0$ Ο πίνακας αντιστρέφεται για

Πόρισμα $\det(AE) = \det A \det E$

Αν E είναι στοιχ. πίνακας τότε ισχύουν και οι αντιστ. ιδιότητες και για στηλοπράξεις.

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

Πρόταση.

$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+p} a_{kp} \det A_{kp}$ ως προς την p στήλη

Αποδ. Θεωρούμε τον A' ο οποίος προέρχεται από τον A με εναλλαγή της πρώτης και p στήλης.

Σύμφωνα με το προηγ. πόρισμα $\det A = -\det A'$

Αν είχαμε $\begin{pmatrix} \alpha_{1p} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{2p} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{np} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = A''$

$\det A'' = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{kp} \det A_{kp} = (-1)^{p-1} \det A \Rightarrow \det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+p} \alpha_{kp} \det A_{kp}$

Πόρισμα Αν ο A είναι κάτω τριγωνικός, τότε $\det A = \alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{nn}$

Αποδ Με επαγωγή στο n και ανάπτυξη ως προς την τελευταία στήλη

Πρόταση $\det A = \det A^t$

Αποδ: $A = E_k \dots E_1 R$, R είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός $E_k, \dots E_1$ στοιχ. πίνακες.

$A^t = (E_k \dots E_1 R)^t = R^t E_1^t \dots E_k^t$

$\det A^t = \det R^t \det E_1^t \dots \det E_k^t = ⊕$

$M_i^t(a) = M_i(a) \Rightarrow \det M_i^t(a) = \det M(a)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$E_{ij}^t = E_{ij} \Rightarrow \det E_{ij}^t = \det E_{ij}$

$A_{ij}^t(a) = A_{ji}(a) \Rightarrow \det A_{ij}^t(a) = \det A_{ji}(a)$

$⊕ = \det R^t \det E_1 \dots \det E_k$

$\det E_1 \dots \det E_k \det R^t = \det E_k \dots \det E_1 \det R = \det A$

R^t αναγρ. κλιμακωτός

$R \to I_{n\times n}$
$\to$ έχει μηδενική γραμμή

$R^t \to I_{n\times n} \Rightarrow \det R^t = 1$
$\to$ έχει μηδ. στήλη $\det R^t = 0$

Παρατήρηση
$$\det A = \sum_{u=1}^{n} (-1)^{u+p} a_{u} \det A_{up} = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{u+q} a_{qt} \det A_{qt}$$

q γραμμή

π.χ. $$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 7 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & -4 & 7 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -3 \\ -1 \end{matrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & -12 & -9 \\ 0 & 6 & -11 & -19 \\ 0 & 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 4 & -12 & -9 \\ 6 & -11 & -19 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 4 & -12 & -9 \\ 6 & -11 & -19 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 6 & -11 & -19 \\ 4 & -12 & -9 \end{pmatrix}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2\cdot 1\cdot 7(-1) = -14$$

Πρόταση Αν $p \neq q$, τότε $\sum_{u=1}^{n} (-1)^{u+q} a_{up} \det A_{uq} = 0$

Αποδ: Αν A' είναι ο πίνακας που προέρχεται αντικαθ. στον A την q στήλη με την p, τότε $\det A' = 0$ έχει δύο ίσες στήλες.
Αναπτύσσουμε ως προς τη συγκεκριμένη μη q στήλη και βγαίνει το άθροισμα

Ορισμός. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Ο προσαρτημένος (adjoint) του A δίνεται από

$$\operatorname{adj} A = \left((-1)^{i+j} \det A_{ij}\right)^t$$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} +4 & -2 \\ -3 & +1 \end{pmatrix} =$ $\det A_{11} = 4$, $\det_{21} = 2$, $\det A_{22} = 1$, $\det A_{12} = -2$

$$A \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \, I_{2\times 2}$$

Θεώρημα Έστω A αντιστρέψ. πίνακας. Τότε: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A =$

$$= \left(\frac{(-1)^{i+j} \det A_{ij}}{\det A}\right)^t$$

π.χ. Να βρεθεί ο A^{-1} με τον $\operatorname{adj} A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} = 5\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 5\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \det A = 10 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$adj = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -4$$

$$\det A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = -4 \quad , \det A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = -10$$

$$\det A_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 2 \quad , \det A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = -5$$

$$\det A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -5 \quad , \det A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -4 \quad , \det A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$adj \begin{pmatrix} -4 & +5 & 1 \\ +4 & -10 & +4 \\ +2 & +5 & -3 \end{pmatrix}$$